TS spé

DEVOIR MAISON N^{0}3

Exercice 1 :

$A = \begin{pmatrix} 16 & 4 & -4 \\ -18 & -4 & 5 \\ 30 & 8 & -7 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. Avec la calculatrice :
   (a) déterminer les matrices $B = AP$ et P^{-1} ;
   (b) déterminer la matrice $D = P^{-1}B$.
2. (a) Exprimer A en fonction de D.
   (b) Exprimer A^2 et A^3 en fonction de P, D^2, D^3 et P^{-1}.
3. Démontrer que, pour tout entier naturel non nul n :
$$A^n = PD^nP^{-1} \text{ et } D^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$
   Déterminer les coefficients de A^n en fonction de n.

Exercice 2 :[Nombres de Mersenne]]

On appelle nombres de Mersenne, les nombres M_n de la forme : $M_n = 2^n - 1,$ avec $n \in \mathbb{N}*$.

1. Calculer les six premiers nombres de Mersenne.
   Quels sont ceux qui sont des nombres premiers ?
2. Soit n un entier naturel non nul et a un entier.
   Montrer la factorisation standard :
   $a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a + 1)$.
3. En déduire que, si d est un diviseur de n, M_n est divisible par $2^d - 1$.
4. Montrer que, si M_n est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ? (On pourra calculer M_{11}.)
5. Soit a et n deux entiers tels que : $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$.
   Montrer que si $a^n - 1$ est premier, alors $a = 2$ et n est premier.

Exercice 3 :

Soit la matrice $M = \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $M^2 = M + 2I$.
2. Exprimer M^3 et M^4 sous la forme $\alpha M + \beta I$ où α et β sont des réels.
3. Soit les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 0$ et $v_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :
$$\begin{cases} u_{n+1} & = & u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & 2u_n \end{cases}.$$
Démontrer que : $M^n = u_n M + v_n I$.
4. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que (w_n) est géométrique de raison -1.
   (b) En déduire une expression de w_n en fonction de n.
5. Soit la suite (x_n) définie par $x_n = u_n + \dfrac{(-1)^n}{3}$.
On admet que (x_n) est géométrique de raison 2.
En déduire une expression de x_n en fonction de n.
6. Déduire de ce qui précède u_n et v_n en fonction de n.
7. En déduire alors M^n en fonction de n.