

Exercice 1 :

1. On considère l'équation (E) à résoudre dans \mathbb{Z} :

$$7x - 5y = 1.$$

- (a) Vérifier que le couple (3 ; 4) est solution de (E).
 (b) Montrer que le couple d'entiers $(x ; y)$ est solution de (E) si et seulement si $7(x - 3) = 5(y - 4)$.
 (c) Montrer que les solutions entières de l'équation (E) sont exactement les couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs tels que :

$$\begin{cases} x = 5k + 3 \\ y = 7k + 4 \end{cases} \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

2. Une boîte contient 25 jetons, des rouges, des verts et des blancs. Sur les 25 jetons il y a x jetons rouges et y jetons verts. Sachant que $7x - 5y = 1$, quels peuvent être les nombres de jetons rouges, verts et blancs ?

Dans la suite, on supposera qu'il y a 3 jetons rouges et 4 jetons verts.

3. On considère la marche aléatoire suivante d'un pion sur un triangle ABC. À chaque étape, on tire au hasard un des jetons parmi les 25, puis on le remet dans la boîte.

- Lorsqu'on est en A :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en B. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en A.

- Lorsqu'on est en B :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en C. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en B.

- Lorsqu'on est en C :

Si le jeton tiré est rouge, le pion va en A. Si le jeton tiré est vert, le pion va en B. Si le jeton tiré est blanc, le pion reste en C.

Au départ, le pion est sur le sommet A.

Pour tout entier naturel n , on note a_n , b_n et c_n les probabilités que le pion soit respectivement sur les sommets A, B et C à l'étape n .

On note X_n la matrice ligne $(a_n \quad b_n \quad c_n)$ et T la matrice $\begin{pmatrix} 0,72 & 0,12 & 0,16 \\ 0,12 & 0,72 & 0,16 \\ 0,12 & 0,16 & 0,72 \end{pmatrix}$.

Donner la matrice ligne X_0 et montrer que, pour tout entier naturel n ,

$$X_{n+1} = X_n T.$$

4. On admet que $T = PDP^{-1}$ où $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{37}{110} & \frac{4}{11} \\ \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{11} & -\frac{1}{11} \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,6 & 0 \\ 0 & 0 & 0,56 \end{pmatrix}$.

- (a) À l'aide de la calculatrice, donner les coefficients de la matrice P . On pourra remarquer qu'ils sont entiers.

(b) Montrer que $T^n = PD^nP^{-1}$.

(c) Donner sans justification les coefficients de la matrice D^n .

On note $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n$ les coefficients de la première ligne de la matrice T^n ainsi :

$$T^n = \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n & \gamma_n \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

On admet que $\alpha_n = \frac{3}{10} + \frac{7}{10} \times 0,6^n$ et $\beta_n = \frac{37 - 77 \times 0,6^n + 40 \times 0,56^n}{110}$.

On ne cherchera pas à calculer les coefficients de la deuxième ligne ni ceux de la troisième ligne.

5. On rappelle que, pour tout entier naturel n , $X_n = X_0T^n$.

(a) Déterminer les nombres a_n, b_n , à l'aide des coefficients α_n et β_n . En déduire c_n .

(b) Déterminer les limites des suites (a_n) , (b_n) et (c_n) .

(c) Sur quel sommet a-t-on le plus de chance de se retrouver après un grand nombre d'itérations de cette marche aléatoire ?

Exercice 2 :

On considère la suite définie par son premier terme $u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n , par

$$u_{n+1} = 2u_n + 6.$$

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 9 \times 2^n - 6.$$

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, u_n est divisible par 6.

On définit la suite d'entiers (v_n) par, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $v_n = \frac{u_n}{6}$.

3. On considère l'affirmation : « pour tout entier naturel n non nul, v_n est un nombre premier ».

Indiquer si cette affirmation est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

4. (a) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $v_{n+1} - 2v_n = 1$.

(b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, v_n et v_{n+1} sont premiers entre eux.

(c) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, le PGCD de u_n et u_{n+1} .

5. (a) Vérifier que $2^4 \equiv 1 \pmod{5}$.

(b) En déduire que si n est de la forme $4k + 2$ avec k entier naturel, alors u_n est divisible par 5.

(c) Le nombre u_n est-il divisible par 5 pour les autres valeurs de l'entier naturel n ? Justifier.