

**Exercice 1 :**

$n$  est un entier relatif.

Dans les cas suivants : pour quelles valeurs de  $n$ ,  $b$  divise-t-il  $a$  ?

1.  $a = n - 3$  et  $b = 2n + 3$
2.  $a = 2n^2 + 11n + 7$  et  $b = 2n + 5$

**Exercice 2 :**

Déterminer tous les couples d'entiers relatifs  $(a, b)$  tels que  $4a^2 - b^2 = 27$

**Exercice 3 :**

$n$  est un entier relatif.

Soient  $a = 2n - 1$  et  $b = 6n + 3$ , le but de cet exercice est de déterminer les diviseurs communs positifs de  $a$  et  $b$ .

1. (a) Démontrer que si  $k$  est un diviseur commun positif de  $a$  et  $b$  alors  $k$  divise 6.  
(b) En déduire les valeurs possibles de  $k$ .
2. Réciproquement :  
(a) Démontrer que 2 et 6 ne divisent pas  $a$  pour tout  $n$ .  
(b) En déduire les seuls diviseurs communs positifs de  $a$  et  $b$ .

**Exercice 4 :**

Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$  (se lit : « factoriel  $n$  »).  
Ainsi  $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ .

Pour tout  $k$  tel que  $2 \leq k \leq n$ , donner un diviseur positif de  $(n! + k)$  autre que 1 et  $(n! + k)$ .

## Exercice 1 :

- Si  $b$  divise  $a$  alors  $b \mid b - 2a$ , donc  $2n + 3 \mid 2n + 3 - 2n + 6$  donc  $2n + 3 \mid 9$ .  
On cherche les diviseurs de 9 :

|          |    |    |    |    |   |   |
|----------|----|----|----|----|---|---|
| $2n + 3$ | -9 | -3 | -1 | 1  | 3 | 9 |
| $n$      | -6 | -3 | -2 | -1 | 0 | 3 |

Donc  $S = \{-6; -3; -2; -1; 0; 3\}$

Réciproquement, pour  $n \in S$ ,  $b \mid a$ .

- Si  $2n + 5 \mid 2n^2 + 11n + 7$  alors  $2n + 5 \mid 2n^2 + 11n + 7 - (n + 3)(2n + 5)$   
donc  $2n + 5 \mid -8$ .  
On cherche les diviseurs de -8,

|          |          |          |          |    |    |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----|----|----------|----------|----------|
| $2n + 5$ | -8       | -4       | -2       | -1 | 1  | 2        | 4        | 8        |
| $n$      | $\times$ | $\times$ | $\times$ | -3 | -2 | $\times$ | $\times$ | $\times$ |

Seulement pour 1 et -1, on trouve des valeurs entières pour  $n$ .

$S = \{-3, -2\}$ .

Réciproquement, pour  $n \in S$ ,  $b \mid a$ .

**Exercice 2** :  $4a^2 - b^2 = 27$ . Dans l'équation,  $a$  et  $b$  sont au carré, donc si  $a$  et  $b$  sont solutions, leurs opposés aussi. On peut se restreindre dans un premier aux entiers naturels.

$4a^2 - b^2 = 27 \Leftrightarrow (2a - b)(2a + b) = 27$ .  $2a - b$  et  $2a + b$  sont donc des diviseurs de 27. Mais,  $a, b \in \mathbb{N}$ , donc  $2a + b > 0$  et donc  $2a - b > 0$ . De plus,  $2a + b > 2a - b$ , car  $a$  et  $b$  sont positifs.

Les diviseurs positifs de 27 sont : 1, 3, 9, 27. Et donc,

$$\begin{cases} 2a + b = 27 \\ 2a - b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 28 \\ b = 2a - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = 13 \end{cases}$$

ou  $\begin{cases} 2a + b = 9 \\ 2a - b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a = 12 \\ b = 2a - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 3 \end{cases}$

Les solutions sont donc :

(2, 13) et (-7, 13); (7, -13); (-7, -13)

puis (3, 3) et (-3, 3); (3, -3); (-3, -3)

Réciproquement, tous ces couples sont solutions de l'équation.

## Exercice 3 :

- (a) Si  $a \mid b$  et  $k \mid b$  alors  $k \mid b - 3a$  et donc  $k \mid 6n + 3 - 3(2n - 1) \Leftrightarrow k \mid 6$ .  
(b)  $k$  peut donc être égal à 1, 2, 3 ou 6.
- Réciproquement :
  - $a = 2n - 1$  donc  $a$  est un nombre impair, donc 2 ne divise pas  $a$ . Comme  $6 = 2 \times 3$  et que 2 ne divise pas  $a$ , alors 6 ne divise pas  $a$ .
  - 2 et 6 ne peuvent pas être des diviseurs communs à  $a$  et  $b$ . Les seuls possibles sont donc 1 et 3.  
Pour  $k = 3$ , en prenant  $n = 2$ , on a  $3 \mid a$  et  $b$ .

## Exercice 4 :

$$\begin{aligned} n! + k &= 1 \times 2 \times \cdots \times (k-1) \times k \times (k+1) \times \cdots \times n + k \\ &= k(1 \times 2 \times \cdots \times (k-1) \times (k+1) \times \cdots \times n + 1) \end{aligned}$$

Donc  $k$  divise  $n! + k$ .