DEVOIR SURVEILLE N^0 2

Exercice 1 :

b est entier naturel compris entre 0 et 6 inclus. Déterminer b dans les cas suivants :

1. $22012 \equiv b\,(mod\,7)$
2. $-45787 \equiv b\,(mod\,7)$

Exercice 2 :

Trouver tous les entiers relatifs x tels que $x \equiv 5\,(mod\,9)$ et $-30 \leqslant x \leqslant 30$.

Exercice 3 :

1. Recopier et compléter cette table des restes dans la congruence modulo 4.

$x \equiv$	0	1	2	3
$2x \equiv$				

2. Démontrer que l'équation $2x + 5 \equiv 2\,(mod\,4)$ n'a pas de solution.

Exercice 4 :

A l'aide d'une table des restes dans la congruence modulo 5.
Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a $n^5 + 4n \equiv 0\,(mod\,5)$.

Exercice 5 :

1. (a) Démontrer que $6 \equiv -1\,(mod\,7)$.
   (b) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{2753} par 7.
2. Démontrer que le reste de la division euclidienne de 2001^{2012} par 13 est 12.

Exercice 6 :

1. Démontrer que $3 \equiv -2\,(mod\,5)$ et que $4 \equiv -1\,(mod\,5)$
2. En déduire que $1^{2017} + 2^{2017} + 3^{2017} + 4^{2107} \equiv 0\,(mod\,5)$.

DEVOIR SURVEILLE N^0 2, Correction

Exercice 1 :

1. $22012 \equiv 4\,(mod\ 7)$
2. $-45787 \equiv 0\,(mod\ 7)$

Exercice 2 :

$x \equiv 5\,(mod\ 9)$, donc $x = 5 + 9k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On trouve donc : $x = -22$ ou -13 ou -4 ou 5 ou -14 ou 23.

Exercice 3 :

1.

$x \equiv$	0	1	2	3
$2x \equiv$	0	2	0	2

2. $2x + 5 \equiv 2\,(mod\ 4) \Leftrightarrow 2x \equiv -3\,(mod\ 4) \Leftrightarrow 2x \equiv 1\,(mod\ 4)$
   D'après le tableau précédent modulo 4, $2x$ est congru à 0 ou 2 . Donc, il ne peut pas être congru à 1. L'équation n'a pas de solution.

Exercice 4 :

$n \equiv$	0	1	2	3	4
$n^5 \equiv$	0	1	2	3	4
$4n \equiv$	0	4	3	2	1
donc $n^5 + 4n \equiv$	0	0	0	0	0

Donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^5 + 4n \equiv 0\,(mod\ 5)$.

Exercice 5 :

1. (a) $6 = -1 + 7$, donc $6 \equiv -1\,(mod\ 7)$.
   (b)
   $$\begin{aligned} 6^{2753} &\equiv (-1)^{2753}\,(mod\ 7) \\ &\equiv (-1)\,(mod\ 7) \\ &\equiv 6\,(mod\ 7) \end{aligned}$$
   Le reste est donc 6.
2. De la même manière, on remarque que $2001 \equiv -1\,(mod\ 13)$.
   Donc $2001^{2012} \equiv (-1)^{2012}\,(mod\ 13)$ et donc $2001^{2012} \equiv 1\,(mod\ 13)$ car 2012 est pair.
   Le reste est donc 1.

Exercice 6 :

1. $3 = -2 + 5$, donc $3 \equiv -2\,(mod\ 5)$ et $4 = -1 + 5$, donc $4 \equiv -1\,(mod\ 5)$
2. Par conséquent, $1^{2017} + 2^{2017} + 3^{2017} + 4^{2107} \equiv 1^{2017} + 2^{2017} + (-2)^{2017} + (-1)^{2017}\,(mod\ 5)$ et donc $1^{2017} + 2^{2017} + 3^{2017} + 4^{2107} \equiv 1^{2017} + 2^{2017} - 2^{2017} - 1^{2017}\,(mod\ 5)$ car 2017 est impair.
   Et donc $1^{2017} + 2^{2017} + 3^{2017} + 4^{2107} \equiv 0\,(mod\ 5)$