DEVOIR SURVEILLE N^0 3

Exercice 1 :

Soient $A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 6 \\ -4 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. A l'aide de votre calculatrice donner P^{-1}.
2. A l'aide de votre calculatrice, déterminer la matrice diagonale D définie par $D = P^{-1}AP$.
3. A l'aide de la relation précédente, démontrer que $A = PDP^{-1}$.
4. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
   $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. Déterminer les coefficients de A^n en fonction de n.

Exercice 2 :

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $a = 3n + 2$ et $b = 4n - 1$. On note $\Delta = pgcd(a; b)$.

1. Démontrer que les valeurs possibles de Δ dont 1 ou 11.
2. (a) En utilisant la tables des restes de la congruence modulo 11, trouvez les entiers n pour lesquels $a \equiv 0 \ mod(11)$ et $b \equiv 0 \ mod(11)$.

   (b) Quelle est alors, suivant les valeurs de n , la valeur de Δ ?

Exercice 3 :

Si on divise 2844 et 5555 par un même entier naturel n non nul, les restes respectifs sont 15 et 12. Quel est cet entier ?

Exercice 4 :

a et b sont deux entiers naturels distincts, $a = 540$ et $170 < b < 250$.
Le pgcd de a et b est 15. Trouvez b.

Exercice 5 :

1. Démontrer que, pour tout entier naturel $n > 1$, le pgcd de n et $n^2 - 1$ est 1.
2. Déduisez-en le pgcd de $n^2 + n$ et $(n + 1)(n^2 - 1)$.